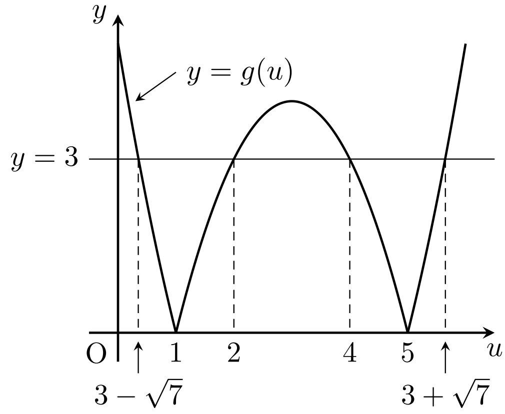
令和６年度 学力検査問題 数学 解答

1 $a > 1, \quad f(x) = \left| a^{2x} - 6a^x + 5 \right|$



$a^x = u$ とおく。このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| a^{2x} - 6a^x + 5 \right| = \left| u^2 - 6u + 5 \right| \\ &= |(u-1)(u-5)|. \end{aligned}$$

そこで $g(u) = \left| u^2 - 6u + 5 \right|$ とおくと，
$f(x) = g(a^x)$ であり，$y = g(u)$ のグラフは右図。

(1) $f(x) \geqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left| u^2 - 6u + 5 \right| \geqq 3$

$\Leftrightarrow$ 「$u^2 - 6u + 5 \geqq 3$ または $u^2 - 6u + 5 \leqq -3$」

$\Leftrightarrow$ 「$(u-3)^2 \geqq 7$ または $(u-2)(u-4) \leqq 0$」

$\Leftrightarrow$ 「$u \leqq 3 - \sqrt{7},\ 2 \leqq u \leqq 4,\ 3 + \sqrt{7} \leqq u$」

$\Leftrightarrow$ 「$a^x \leqq 3 - \sqrt{7},\ 2 \leqq a^x \leqq 4,\ 3 + \sqrt{7} \leqq a^x$」

よって，$a = 2$ のとき，

$f(x) \geqq 3 \quad \Leftrightarrow$ 「$2^x \leqq 3 - \sqrt{7},\ 2 \leqq 2^x \leqq 4,\ 3 + \sqrt{7} \leqq 2^x$」

$\Leftrightarrow$ 「$x \leqq \log_2(3 - \sqrt{7}),\ 1 \leqq x \leqq 2,\ \log_2(3 + \sqrt{7}) \leqq x$」

答：$x \leqq \log_2(3 - \sqrt{7}),\ 1 \leqq x \leqq 2,\ \log_2(3 + \sqrt{7}) \leqq x$

(2) (1) より，$f(x) \geqq 3 \quad \Leftrightarrow$ 「$a^x \leqq 3 - \sqrt{7},\ 2 \leqq a^x \leqq 4,\ 3 + \sqrt{7} \leqq a^x$」$\cdots\cdots$①
よって，$1 \leqq x \leqq 2$ で常に①が成立するような，a の範囲を求めればよい。
$a > 1$ より，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，a^x のとりうる範囲は $a \leqq a^x \leqq a^2$ である。
ここで，$3 - \sqrt{7} < 1 < a < a^2$ なので，$a \leqq a^x \leqq a^2$ で常に①が成立するための条件は，

「$2 \leqq a < a^2 \leqq 4$ または $3 + \sqrt{7} \leqq a$」 $\Leftrightarrow$ 「$a = 2$ または $3 + \sqrt{7} \leqq a$」

答：$a = 2$ または $a \geqq 3 + \sqrt{7}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\begin{cases} P_1(x) = x \\ Q_1(x) = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} P_{n+1}(x) = xP_n(x) - Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) = P_n(x) + xQ_n(x) \end{cases}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1) 与えられた漸化式から，順に

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= xP_1(x) - Q_1(x) = x \cdot x - 1 = \boldsymbol{x^2 - 1}, \\
Q_2(x) &= P_1(x) + xQ_1(x) = x + x \cdot 1 = \boldsymbol{2x}, \\
P_3(x) &= xP_2(x) - Q_2(x) = x\left(x^2 - 1\right) - 2x = \boldsymbol{x^3 - 3x}, \\
Q_3(x) &= P_2(x) + xQ_2(x) = \left(x^2 - 1\right) + x \cdot 2x \ = \boldsymbol{3x^2 - 1}, \\
P_4(x) &= xP_3(x) - Q_3(x) = x\left(x^3 - 3x\right) - \left(3x^2 - 1\right) = \boldsymbol{x^4 - 6x^2 + 1}, \\
Q_4(x) &= P_3(x) + xQ_3(x) = \left(x^3 - 3x\right) + x\left(3x^2 - 1\right) = \boldsymbol{4x^3 - 4x}.
\end{aligned}$$

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ において，

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) + iQ_{n+1}(x) &= \{xP_n(x) - Q_n(x)\} + i\{P_n(x) + xQ_n(x)\} \\
&= (x+i)P_n(x) + (-1+ix)Q_n(x) \\
&= (x+i)P_n(x) + i(x+i)Q_n(x) \\
&= (x+i)\{P_n(x) + iQ_n(x)\}.
\end{aligned}$$

したがって，$\{P_n(x) + iQ_n(x)\}$ は公比 $x + i$ の等比数列なので，

$$P_n(x) + iQ_n(x) = (x+i)^{n-1}\{P_1(x) + iQ_1(x)\} = (x+i)^{n-1}(x + i \cdot 1) = (x+i)^n.$$

(3) $n \geqq 2$ のとき，$P_n(x) + iQ_n(x) = (x+i)^n$ に $x = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ を代入して，

$$\begin{aligned}
P_n\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) + iQ_n\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) &= \left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}} + i\right)^n = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} + i\right)^n \\
&= \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^n = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n}{\sin^n\frac{\pi}{2n}} \\
&= \frac{\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin^n\frac{\pi}{2n}} \quad \text{(ド・モアブルの定理より)} \\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}{\sin^n\frac{\pi}{2n}} = \frac{i}{\sin^n\frac{\pi}{2n}}.
\end{aligned}$$

ここで，$P_n\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right)$，$Q_n\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right)$，$\dfrac{1}{\sin^n\frac{\pi}{2n}}$ は実数なので，

$$P_n\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) + iQ_n\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) = i \cdot \frac{1}{\sin^n\frac{\pi}{2n}}$$

の実部，虚部を比較して，$P_n\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) = 0, \quad Q_n\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) = \dfrac{1}{\sin^n\frac{\pi}{2n}}$.

特に，$P_n\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}\right) = 0$ なので，$x = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ は方程式 $P_n(x) = 0$ の解である。

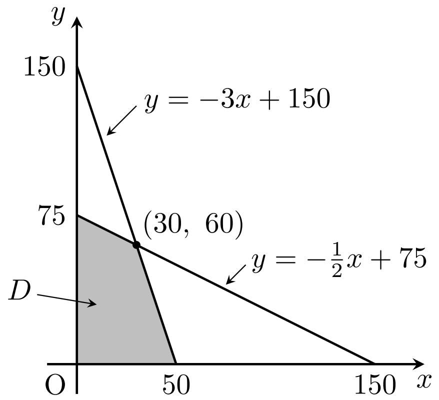
$\boxed{\mathbf{3}}$

ある月に，製品 X を x kg，製品 Y を y kg 製造するとする。このように製造できるための条件は，

$$\begin{cases} 2x+4y \leqq 300 \\ 9x+3y \leqq 450 \\ x \geqq 0, \quad y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y \leqq 150 \\ 3x+y \leqq 150 \\ x \geqq 0, \quad y \geqq 0 \end{cases}$$

ここで，$\begin{cases} x+2y = 150 \\ 3x+y = 150 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 30 \\ y = 60 \end{cases}$ なので，

$(x,\ y)$ の取り得る範囲は右図の色付き部分（境界を含む）である。以下，この（色付き部分の）領域を D とする。



(1) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ に対して，この月の利益を k 万円とすると，

$$k = 5x+3y \quad \iff \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{k}{3} \ \cdots\cdots ①$$

よって，$(x,\ y)$ が D 内をうごくときの k の最大値は，直線①と領域 D が共有点をもつような k の最大値に一致する。直線①の傾き $-\dfrac{5}{3}$ について，$-3 < -\dfrac{5}{3} < -\dfrac{1}{2}$ なので，k が最大となるのは，①と D の共有点が $(x,\ y) = (30,\ 60)$ のときである。このとき，$k = 5 \cdot 30 + 3 \cdot 60 = 330$.

答： X を 30 kg，Y を 60 kg 製造すればよい。このとき，利益は 330 万円

(2) 以下，$p \geqq 0,\ q \geqq 0$ で考える。この月の利益を k 万円とすると，$k = px+qy$

よって $q > 0$ のとき，$y = -\dfrac{p}{q}x + \dfrac{k}{q} \ \cdots\cdots ②$

②と D が共有点をもつような k の最大値を考えればよい。②の傾きで場合分けを行う。

(I) $-3 < -\dfrac{p}{q} < -\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{3}p < q < 2p$ のとき

k は，$(x,\ y) = (30,\ 60)$ で最大値 $k = 30p+60q$ をとる。

(II) $-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{p}{q} \iff 2p \leqq q$ のとき

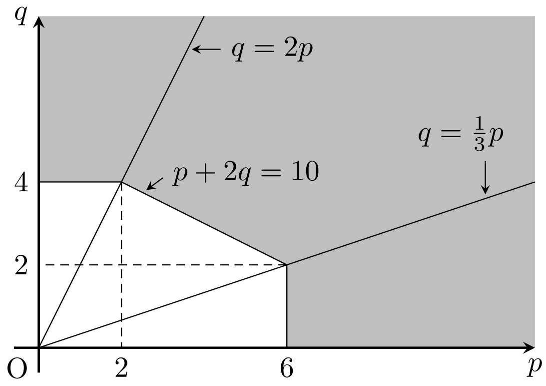
k は，$(x,\ y) = (0,\ 75)$ で最大値 $k = 75q$ をとる。

(III) 「$-\dfrac{p}{q} \leqq -3$ または $q = 0$」 $\iff q \leqq \dfrac{1}{3}p$ のとき

k は，$(x,\ y) = (50,\ 0)$ で最大値 $k = 50p$ をとる。

よって，この最大値が 300 以上となるような点 $(p,\ q)$ の範囲は，$p \geqq 0,\ q \geqq 0$ のうち，3 つの領域 (I)「$\dfrac{1}{3}p < q < 2p$ かつ $30p+60q \geqq 300$」，(II)「$2p \leqq q$ かつ $75q \geqq 300$」，(III)「$q \leqq \dfrac{1}{3}p$ かつ $50p \geqq 300$」 を合わせた部分になる。したがって，求める範囲は，$p \geqq 0,\ q \geqq 0$ のうち，「$\dfrac{1}{3}p < q < 2p$ かつ $p+2q \geqq 10$」または「$2p \leqq q$ かつ $q \geqq 4$」または「$q \leqq \dfrac{1}{3}p$ かつ $p \geqq 6$」 を満たす部分になるので，図示すると次ページの色付き部分（境界を含む）になる。

3 （続き）答は右図



4

(1) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ と置換すると， $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \to \sqrt{2} \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$，　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$　なので，

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(1-\sin^2\theta\right)}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}.$$

同様にして，

$$\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}.$$

(2) $x^2+(y-1)^2=2$ ……①　より，

x の取り得る値の範囲は $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$.

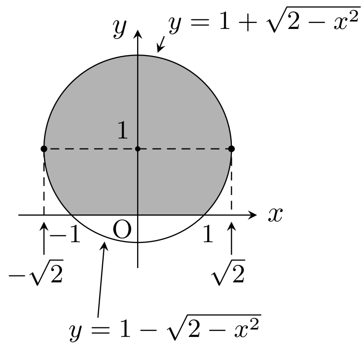
この範囲の x に対して，

① $\Leftrightarrow$ $y-1=\pm\sqrt{2-x^2}$ $\Leftrightarrow$ $y=1\pm\sqrt{2-x^2}$.

ここで，$1-\sqrt{2-x^2}\geqq 0$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2-x^2}\leqq 1$

$\Leftrightarrow$ $0\leqq 2-x^2\leqq 1$ $\Leftrightarrow$ $1\leqq x^2\leqq 2$ $\Leftrightarrow$ $1\leqq |x|\leqq\sqrt{2}$

よって，右図の色付き部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めればよい。



①は y 軸に関して対称なので，求める体積は，

$$2\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\pi\left(1+\sqrt{2-x^2}\right)^2dx-\int_1^{\sqrt{2}}\pi\left(1-\sqrt{2-x^2}\right)^2dx\right\}$$

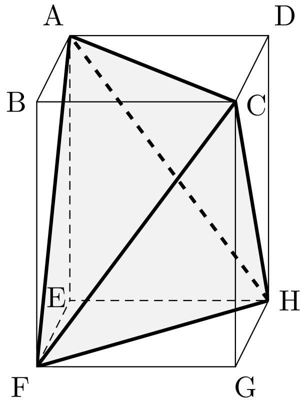
$$=2\pi\left[\int_0^{\sqrt{2}}\left\{1+\left(2-x^2\right)+2\sqrt{2-x^2}\right\}dx-\int_1^{\sqrt{2}}\left\{1+\left(2-x^2\right)-2\sqrt{2-x^2}\right\}dx\right]$$

$$=2\pi\left\{\int_0^1\left(3-x^2\right)dx+2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx+2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\left[3x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\cdot\frac{\pi}{2}+2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}\qquad\text{((1) より)}$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{5}{3}\right)=\boldsymbol{3\pi^2+\frac{10}{3}\pi}$$

5



四面体 P の 6 辺の長さについて，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{FH}=x,\quad \mathrm{AF}=\mathrm{CH}=y,\quad \mathrm{AH}=\mathrm{CF}=z$$

とおく。このとき，

$$\begin{cases} x^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2 \ \cdots\cdots ① \\ y^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2 \ \cdots\cdots ② \\ z^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2 \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

ここで，$\mathrm{AB}<\mathrm{AD}<\mathrm{AE}$ より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2<\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2<\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2<y^2<z^2 \quad\Leftrightarrow\quad x<y<z \ \cdots\cdots ④$$

である。また，四面体 P の 6 辺の長さの和を ℓ とすると，$\ell=2x+2y+2z=2(x+y+z)$ $\cdots\cdots$⑤ である。

四面体 P は，直方体 ABCD-EFGH から 4 つの三角錐 ABC-F, CDA-H, FEH-A, HGF-C を取り除いたものである。取り除く 4 つの三角錐の体積は，いずれも $\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\right)\times\mathrm{AE}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}$ なので，四面体 P の体積を V とすると，

$$V=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}-\frac{1}{6}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\times 4=\frac{1}{3}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE} \ \cdots\cdots ⑥$$

(1) x, y, z は整数で $z\leqq 9$ なので，④より $y\leqq 8$, $x\leqq 7$.
よって，⑤より $\ell\leqq 2(7+8+9)=48$ であり，等号成立は $x=7$, $y=8$, $z=9$ のときに限る。
$x=7$, $y=8$, $z=9$ のとき，①，②，③より

$$\mathrm{AB}^2=\frac{7^2+8^2-9^2}{2}=16,\quad \mathrm{AD}^2=\frac{7^2+9^2-8^2}{2}=33,\quad \mathrm{AE}^2=\frac{8^2+9^2-7^2}{2}=48$$

よって，$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AD}=\sqrt{33}$, $\mathrm{AE}=4\sqrt{3}$ となり，このような立体は実現する。したがって，ℓ の最大値は **48** であり，このときの四面体 P の体積 V は，⑥より $V=\dfrac{1}{3}\cdot4\cdot\sqrt{33}\cdot4\sqrt{3}=\boldsymbol{16\sqrt{11}}$.

(2) ①，②，③を AB^2, AD^2, AE^2 について解いて，

$$\mathrm{AB}^2=\frac{x^2+y^2-z^2}{2} \ \cdots\cdots ⑦,\ \mathrm{AD}^2=\frac{x^2+z^2-y^2}{2} \ \cdots\cdots ⑧,\ \mathrm{AE}^2=\frac{y^2+z^2-x^2}{2} \ \cdots\cdots ⑨$$

これより特に，⑦より，$\mathrm{AB}^2=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2}>0 \Leftrightarrow x^2+y^2-z^2>0$ $\cdots\cdots$⑩ が必要。
逆に，x, y, z を，④，⑩を満たす 1 桁の整数とする。このとき，④，⑩より

$$0<\frac{x^2+y^2-z^2}{2}<\frac{x^2+z^2-y^2}{2}<\frac{y^2+z^2-x^2}{2}$$

となるので，⑦，⑧，⑨を満たす直方体 ABCD-EFGH が存在し，$\mathrm{AB}<\mathrm{AD}<\mathrm{AE}$ となる。
したがって，本問の立体が実現するための x, y, z の条件は，「x, y, z が④，⑩を満たす 1 桁の整数」となることである。

ここで，④より $x<y<z$ で，x, y, z は整数なので，$z\geqq y+1$, $y\geqq x+1$. これと⑩より，

$$0<x^2+y^2-z^2\leqq x^2+y^2-(y+1)^2=x^2-2y-1\leqq x^2-2(x+1)-1=(x+1)(x-3)$$

よって，$(x+1)(x-3)>0$ が必要で，$x>0$ なので，$x>3$.　したがって，$x \geqq 4$ が必要。このとき，$y \geqq 5$, $z \geqq 6$，したがって $\ell = 2(x+y+z) \geqq 2(4+5+6) = 30$. 等号成立は $x=4$, $y=5$, $z=6$ のときに限られ，このとき $x^2+y^2-z^2 = 4^2+5^2-6^2 = 5 > 0$ となるので，⑩を満たし，本問の立体は実現する。

したがって，ℓ の最小値は **30** である。また，このとき，⑦，⑧，⑨より

$$\mathrm{AB}^2 = \frac{4^2+5^2-6^2}{2} = \frac{5}{2},\quad \mathrm{AD}^2 = \frac{4^2+6^2-5^2}{2} = \frac{27}{2},\quad \mathrm{AE}^2 = \frac{5^2+6^2-4^2}{2} = \frac{45}{2}$$

となるので，四面体 P の体積 V は，⑥より

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{27}{2}}\sqrt{\frac{45}{2}} = \frac{5\cdot 9\sqrt{3}}{3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{15}{4}\sqrt{6}}.$$